Extremwertaufgabe

In einem halbkreisförmigen Schacht soll ein Hänger fahren. Der Schacht ist zwei Meter hoch und vier Meter breit. Wie breit und hoch sollte der rechteckige Hänger sein, um möglichst viel laden zu können?

Machen Sie bitte eine Skizze. Beschriften Sie die Skizze. Geben Sie bitte Haupt- und Nebenbedingung an. Schreiben Sie bitte einen Antwortsatz.

1. Hauptbedingung

Skizze

A ist der Flächeninhalt des Rechtecks, b die Breite und a die Höhe.

$$A = a \cdot b$$

2. Nebenbedingung

Wir betrachten nur eine Hälfte und nennen die halbe Breite x.

$$a^2 + x^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 2^2 - x^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2^2 - x^2}$$

3. Extremalbedingung

Wir setzen $a^2 + x^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 2^2 - x^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2^2 - x^2}$ in $A = a \cdot 2x$ ein:

$$A(x) = \sqrt{2^2 - x^2} \cdot 2x = 2 \cdot \sqrt{2^2 x^2 - x^4}$$

4. Extremwertbestimmung

$$A'(x) = \frac{0,5 \cdot 2}{\sqrt{2^2 x^2 - x^4}} \cdot (8x^1 - 4x^3) \text{ (P)}$$

Wir betrachten den Zähler des Bruches.

Es gilt $(8x - 4x^3) = 0 \Leftrightarrow (2x - x^3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } 2 - x^2 = 0)$. Lösungen sind die Nullstellen 0, $\sqrt{2}$, weil x als Länge immer größer oder gleich Null ist.

(Auch hier kann man über die zweite Ableitung auf einen Hochpunkt schließen.)

5. Antwortsatz

Der Schacht sollte $2 \cdot \sqrt{2}m \approx 2,83m$ breit und $\sqrt{2}m \approx 1,41m$ hoch sein.